

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни
«Теорія функцій комплексної змінної»
для студентів спеціальності
014 «Середня освіта (Математика)»

Краматорськ 2021

**Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія**

Укладач: () О. А. Костіков

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни
«Теорія функцій комплексної змінної»
для студентів спеціальності
014 «Середня освіта (Математика)»**

До друку прим..
Перший проректор
_____ А. М. Фесенко

Затверджено
на засіданні
методичної ради
Протокол № 9 від 17.06.2021

Краматорськ 2021

УДК 517

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Теорія функцій комплексної змінної» для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»/ Укл.: О. А. Костіков. – Краматорськ: ДДМА, 2021. – 48 с.

Методичні вказівки «Теорія функцій комплексної змінної» містять у стислому вигляді основний теоретичний матеріал з курсу теорії функцій комплексної змінної, практичні вправи для аудиторної і самостійної роботи студентів. Призначений для студентів вищих навчальних закладів, викладачів математичних дисциплін.

Укладач

О. А. Костіков, доц.

Відпов. за вип.

В. М. Астахов, доц.

ЗМІСТ

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА. АЛГЕБРАЇЧНА, ГЕОМЕТРИЧНА, ТРИГОНОМЕТРИЧНА І ПОКАЗНИКОВА ФОРМИ ЗАПИСУ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ	6
ПОСЛІДОВНОСТІ І РЯДИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ.	8
СТЕПЕНЕВИЙ РЯД	8
ФУНКЦІЇ ІЗ C В C . ГРАНИЦЯ, НЕПЕРЕРВНІСТЬ	10
ПОХІДНА ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. УМОВИ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНOSTІ	12
ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ І АРГУМЕНТИ.....	14
ПОХІДНОЇ КОМПЛЕКСНОЇ ФУНКЦІЇ.....	14
ОЗНАЧЕННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ. ПОНЯТТЯ КОНФОРМНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ.....	16
ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ	18
ДРОБОВО-ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ	19
СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ. ПОВЕРХНЯ РИМАНА	21
ФУНКЦІЯ ЖУКОВСЬКОГО.....	23
ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ	24
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ.....	25
ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ. ТОЧКА РОЗГАЛУДЖЕННЯ.....	27
РАДИКАЛ. ЗАГАЛЬНА СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ	28
ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ.....	28
ІНТЕГРАЛ ВІД ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ПО КУСОЧНО- ГЛАДКОМУ КОНТУРУ	29
ТЕОРЕМА КОШІ.....	30
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА	31
ФОРМУЛА КОШІ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА МОДУЛЯ.....	32
ЦІЛІ ФУНКЦІЇ. ТЕОРЕМА ЛІУВІЛЯ.	34
ОСНОВНА ТЕОРЕМА АЛГЕБРИ	34
РОЗКЛАДАННЯ ФУНКЦІЇ В РЯД ТЕЙЛОРА.	35
ОЦІНКА КОЕФІЦІЄНТІВ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ	35
НУЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ. ІЗОЛЬОВАНІСТЬ НУЛІВ.....	36
ТЕОРЕМА ЄДИНОСТІ	36

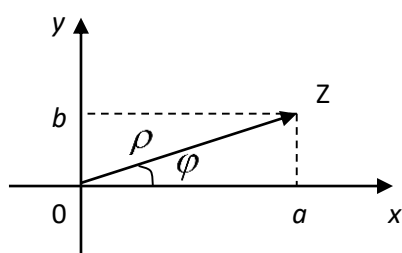
АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ ЯК АНАЛІТИЧНІ ПРОДОВЖЕННЯ	37
РОЗКЛАДАННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ В РЯД ЛОРАНА	38
КЛАСИФІКАЦІЯ ІЗОЛЬОВАНИХ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК. НЕСКІНЧЕННО ВІДДАЛЕНА ОСОБЛИВА ТОЧКА. КРИТЕРІЙ ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ, ЯКА УСУВАЄТЬСЯ	39
КРИТЕРІЙ ПОЛЮСА	40
ТЕОРЕМА СОХОЦЬКОГО-ВЕЙЄРШТРАССА	40
РАЦІОНАЛЬНІ І МІРОМОРФНІ ФУНКЦІЇ	41
ОЗНАЧЕННЯ ЛИШКА. ОБЧИСЛЕННЯ ЛИШКІВ	42
ОСНОВНА ТЕОРЕМА ТЕОРІЇ ЛИШКІВ	43
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ЛИШКІВ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ	44
ЛІТЕРАТУРА	47

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА. АЛГЕБРАЇЧНА, ГЕОМЕТРИЧНА, ТРИГОНОМЕТРИЧНА І ПОКАЗНИКОВА ФОРМИ ЗАПISУ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Комплексні числа складають клас математичних об'єктів, які визначаються описаними нижче властивостями.

Кожному комплексному числу z можна поставити у відповідність єдину упорядковану пару (a, b) дійсних чисел a та b і навпаки. Сума і добуток двох комплексних чисел $z_1 \leftrightarrow (a_1, b_1)$ і $z_2 \leftrightarrow (a_2, b_2)$ визначаються відповідно $z_1 + z_2 \leftrightarrow (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ і $z_1 \cdot z_2 \leftrightarrow (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Дійсні числа a – комплексні числа $(a, 0)$. Уявна одиниця i , визначається $i \leftrightarrow (0, 1)$, тоді $i^2 \leftrightarrow (-1, 0)$, тобто дійсне число $i^2 = -1$. Тому кожне комплексне число $z \leftrightarrow (a, b)$ може бути записане у вигляді суми $z = a + bi$ дійсного числа $a \leftrightarrow (a, 0)$ і чисто уявного числа $ib \leftrightarrow (0, b)$. Така форма запису називається алгебраїчною, при цьому $a = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина z , $b = \operatorname{Im} z$ – уявна частина z .

Геометрично комплексне число можна інтерпретувати, як точку площини з декартовими координатами (a, b) , або вектор площини з координатами (a, b) .



З цього легко випливає тригонометрична форма запису комплексного числа

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$\text{де } \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

і називається модулем комплексного числа $z = a + ib$.

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & a > 0; \\ \pi + \arctg \frac{b}{a}, & a < 0, b > 0; \\ -\pi + \arctg \frac{b}{a}, & a < 0, b < 0, \end{cases}$$

$$-\pi < \arg z \leq \pi; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

і називається головним значенням аргументу комплексного числа z .

Так як кожній точці на комплексній площині можна поставити у відповідність безліч значень аргументу, які відрізняються на $2k\pi$, то

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi.$$

Крім того, використовуючи формулу Ейлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, отримуємо показникову форму запису комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$.

Використовуючи різні форми запису комплексних чисел, отримуємо результати дій над числами.

$$z_1 = a_1 + ib_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \quad z_2 = a_2 + ib_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Більш детальне викладення цього матеріалу див. [1, 2, 3].

Приклад 1

Обчислити $\sqrt[4]{-2 + 2i}$.

Розв'язання

$$z = -2 + 2i, \quad |z| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2},$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{-2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$(\sqrt[4]{z})_k = \sqrt[4]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$(\sqrt[4]{z})_0 = \sqrt[8]{8} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{16} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{16} \right) \right) = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{3\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi}{16} \right), \quad k = 0$$

$$(\sqrt[4]{z})_1 = \sqrt[8]{8} \left(\cos \left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{4} \right) \right) = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{11\pi}{16} + i \sin \frac{11\pi}{16} \right), \quad k = 1$$

$$(\sqrt[4]{z})_2 = \sqrt[8]{8} \left(\cos \left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{4} \right) \right) = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16} \right), \quad k = 2$$

$$(\sqrt[4]{z})_3 = \sqrt[8]{8} \left(\cos \left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 6\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 6\pi}{4} \right) \right) = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{27\pi}{16} + i \sin \frac{27\pi}{16} \right) =$$

$$= \sqrt[8]{8} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{16} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{16} \right) \right) = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{5\pi}{16} - i \sin \frac{5\pi}{16} \right), \quad k = 3.$$

Вправи

1. Виконати дії:

$$1) \frac{1}{i}; \quad 2) \frac{1-i}{1+i}; \quad 3) \frac{2}{1-3i}; \quad 4) (1+i\sqrt{3})^3; \quad 5) z \cdot \bar{z}; \quad 6) \frac{\bar{z}}{z}.$$

2. Знайти модуль і аргумент та представити в тригонометричній формі:

7) $1+i$; 8) $-1-i$; 9) $2+5i$; 10) $-2+5i$; 11) $-2-5i$.

3. Обчисліть:

12) $\sqrt[3]{1}$; 13) $\sqrt[4]{-1}$; 14) $\sqrt[8]{i}$; 15) $\sqrt{1-i}$.

4. Визначте геометричний зміст:

16) $|z - z_0| < R$; 17) $|z - 2| + |z + 2| = 5$; 18) $|z - 2| - |z + 2| = 1$;

19) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$; 20) $\alpha < \arg z < \beta$.

ПОСЛІДОВНОСТІ І РЯДИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ. СТЕПЕНЕВИЙ РЯД

Означення: Послідовністю комплексних чисел називається пронумерована нескінченна множина комплексних чисел і позначається символом

$$\{z\}_{n=1}^{\infty} \quad (z_n = x_n + iy_n).$$

Означення: Число $z = x + iy$ називається границею послідовності $\{z_n\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon)$$

виконується нерівність $|z - z_n| < \varepsilon$.

Позначається цей факт символом $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Теорема 1. Необхідною і достатньою умовою збіжності послідовності $\{z_n\}$, $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$ є збіжність послідовностей дійсних чисел $\{x_n\}$, $\{y_n\}$.

Доведення можна знайти в [1, с. 19].

Приклад: $z_n = \frac{1}{n} + i \frac{n}{n+1}$, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{n}{n+1}$, тоді $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$, $z = i$.

Завдяки цій теоремі всі властивості збіжних послідовностей дійсних чисел переносяться на випадок комплексних чисел.

Ряд $\omega_1 + \dots + \omega_n + \dots$, де $\omega_n (n=1, 2, \dots)$ комплексні числа, називається числовим рядом з комплексними членами і позначається $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$, $S_n = \omega_1 + \dots + \omega_n$ — часткова сума ряду.

Означення: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ називається збіжним, якщо збігається послідовність його часткових сум $\{S_n\}$. Границя $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ називається сумою ряду $S = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$.

З теореми 1 випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n, w_n = x_n + iy_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігаються ряди дійсних чисел $\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

При цьому отримуємо: $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Ряди вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, c_n = a_n + ib_n, z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0$ називають степеневими рядами з центром z_0 . Множину точок, для яких степеневий ряд збігається називають областю збіжності ряду. При цьому областю збіжності степеневого ряду є круг $|z - z_0| < R$, де $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \left(\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right)$, якщо границя кінцева і відмінна від нуля. Якщо границя дорівнює ∞ , то $R = 0$, якщо границя дорівнює 0, то $R = \infty$.

Детальне викладення матеріалу можна знайти в [1, 2, 3].

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{3^n} \right)$ та обчислити його суму.

Розв'язання. Ряди $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ і $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ збігаються, так як вони є нескінченно спадними геометричними прогресіями.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{3^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + i \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 + i \cdot \frac{3}{2}.$$

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$.

$$\text{Розв'язання. } z_0 = 0, c_n = \frac{1}{3^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

тобто $\frac{1}{R} = \frac{1}{3}$, відповідно $R = 3$.

Область збіжності круг $|z| < 3$.

Вправи:

Дослідити збіжність рядів. Знайти область збіжності.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{10^n} i \right)$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} i \right)$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{i}{n} \right)$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2} \right)^n$$

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3} \right)^n (z-i)^n$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} n! (z-1-i)^n$$

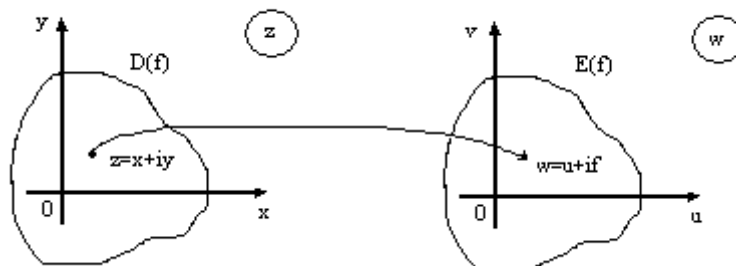
$$4. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (z-i)^n$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{10^n} i \right)$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (1-i)^n z^n$$

ФУНКЦІЇ ІЗ C В C . ГРАНИЦЯ, НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Комплексною функцією комплексної змінної називається функція $w = f(z)$, у якої область визначення $D(f)$ та множина значень $E(f)$ належать множині комплексних чисел C . Ці функції також можна вважати як відображення із C в C .



Частіше за все ми будемо розглядати функції f , у яких область визначення є областю.

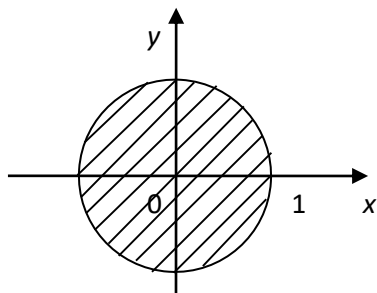
ε -окіл z_0 — $\{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ — відкритий круг радіуса ε з центром z_0 .

Означення: Множина $E \subseteq C$ називається областю, якщо виконуються наступні умови:

- 1) кожна точка множини E — внутрішня (існує ε -окіл точки z , всі точки якого належать E);
- 2) будь-які дві точки множини E можна з'єднати ламаною, всі точки якої належать E .

Приклад області:

$$|z| < 1$$



Однозначна функція комплексної змінної z , яка задана в області G , визначається законом, який ставить кожному $z \in G$ у відповідність одне визначене комплексне число ω . Символічно це записується $\omega = f(z)$.

Оскільки кожне комплексне число характеризується парою дійсних чисел, то задання комплексної функції $\omega = u + iv$ комплексної змінної $z = x + iy$ еквівалентне заданню двох дійсних, тобто $\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ визначені в області G . При цьому $u = \operatorname{Re} \omega$, а $v = \operatorname{Im} \omega$.

Приклад: $\omega = z^2$, $\omega = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, тобто $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

Означення: Однозначна функція $f(z)$ називається однолирковою функцією в області G , якщо в різних точках z цієї області вона приймає різні значення.

Далі ми будемо вважати, що множина D — значень функції $\omega = f(z)$ — область, тоді рівність $\omega = f(z)$ встановлює закон відповідності між точками

області G площини z і точками області D площини ω . Тоді можливо встановити і обернену відповідність – кожній $\omega \in D$ ставиться у відповідність одна або декілька $z \in G$. Це означає, що в D задана (однозначна або багатозначна) функція $z = y(\omega)$ – обернена $f(z)$. Відмітимо, що обернена функція до однолисткової функції – однозначна.

Приклад: $\omega = az + b$, тоді обернена функція $z = \frac{\omega - b}{a}$ однозначна функція.

Нехай $f(z)$ визначена на області G , а z_0 – гранична точка G .

Означення Коші: ω_0 називається границею $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$ таке, що $\forall z \in G$ і такого, що $0 < |z - z_0| < \delta$ виконується нерівність $|\omega_0 - f(z)| < \varepsilon$.

Означення Гейне: ω_0 називається границею $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, якщо для будь-якої послідовності $\{z_n\} \subset G$, яка збігається до $z_0 (z_n \neq z_0)$, послідовність $\{f(z_n)\}$ збігається до ω_0 . Це записується

$$\omega_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

Теорема: Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ гранична точка області визначення $f(z)$. Тоді для того, щоб $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0 = u_0 + iv_0$ необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення

$$u_0 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y), \quad v_0 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y).$$

Доведення див. [2, с. 60].

З цієї теореми слідує виконання всіх властивостей границі функції аналогічні властивостям границі дійсних функцій.

Розглянемо функцію $\omega = \frac{1}{z}$, тоді нескінченно віддалена точка $\omega = \infty$ визначається як точка, що відповідає початку координат $z = 0$ при цьому $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty$.

Означення: Функція $f(z)$ називається неперервною в точці $z_0 \in G$, якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

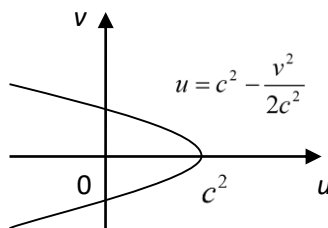
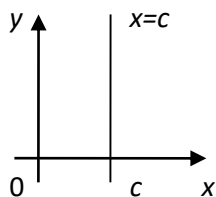
Неперервність $f(z)$ в z_0 еквівалентна неперервності $u(x, y)$, $v(x, y)$ в точці (x_0, y_0) .

Всі властивості неперервних функцій аналогічні властивостям неперервних функцій дійсної змінної див. [2, 3]. Якщо функція неперервна в кожній точці області G , то кажуть, що вона неперервна на області G .

Приклад 1

$\omega = z^2$. Знайти образ лінії $x = c$.

Розв'язання



$$\omega = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy; \quad u = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy \quad \text{при} \quad x = c, \quad u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy.$$

Тоді $v^2 = 2c^2 y^2$ або $y^2 = \frac{v^2}{2c^2}$ і підставляючи в u отримаємо $u = c^2 - \frac{v^2}{2c^2}$ — парабола. Таким чином пряма $x = c$ переходить при відображенні $\omega = z^2$ в параболу $u = c^2 - \frac{v^2}{2c^2}$.

Приклад 2

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^2 + z(1-i) - i}.$$

Розв'язання

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^2 + z(1-i) - i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)(z+i)}{(z-i)(z+1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z+i}{z+1} = \frac{2i}{i+1}.$$

Вправи

1. $f(z) = \frac{1}{z}$, $f(i+1)$, $f(i)$ — ?
2. $\omega = z^2$. Знайти образ $y = c$.
3. $\omega = \frac{1}{z}$. Знайти образ $|z| = R$.
4. $\omega = z + \frac{1}{z}$. Знайти образ $|z| = R$.
5. $\omega = z + 1$. Знайти образ $\arg z = \frac{\pi}{4}$.
6. $\lim_{z \rightarrow i+1} \frac{z^2 - iz - 1 - i}{z - 1 - i}.$
7. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 + iz + 3}{2z^3 + iz^2 + 1 + i}.$
8. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^2 + 1}.$
9. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{\sqrt{z+i} - \sqrt{2i}}{z^2 + 1}.$
10. $\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{1+i}}{\sqrt{z^2 - i} - \sqrt{i}}.$

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. УМОВИ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНOSTІ

Нехай $f(z)$ задана в області G .

Означення: Функція $f(z)$ має в точці $z \in G$ похідну, якщо існує

$$\text{скінчена границя } f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}.$$

Означення: Функція $f(z)$ називається диференційованою в точці $z \in G$, якщо приріст функції $f(z)$ в точці z має вигляд

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) = A \cdot \Delta z + o(\Delta z),$$

де $A \in \mathbb{C}$, $o(\Delta z)$ нескінченно мала більш високого порядку ніж Δz .

Як і у випадку дійсної функції диференційованість в точці еквівалентна існуванню скінченої похідної функції в z (див. [2]). Крім того, з диференційованості функції в точці слідує її неперервність в цій точці.

Безпосередньо із означення похідної слідує, що всі властивості похідної функції дійсної змінної виконуються і в нашому випадку.

Приклад 1

$$f(z) = z^3 + 2z, \text{ тоді } f'(z) = 3z^2 + 2.$$

Приклад 2

$$f(z) = \bar{z}. \text{ Знайти } f'(z).$$

Похідну знайдемо за означенням

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= f(z + \Delta z) - f(z) = \overline{z + \Delta z} - \bar{z} = \overline{x + iy + \Delta x + i\Delta y} - \overline{x + iy} = \\ &= x + \Delta x - iy - i\Delta y - x + iy = \Delta x - i\Delta y, \quad z = x + iy, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y. \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} 1, \Delta y = 0, \Delta z = \Delta x \neq 0, \\ -1, \Delta x = 0, \Delta z = i\Delta y \neq 0, \end{cases} \text{ тобто границя } \frac{\Delta f}{\Delta z} \text{ не існує, а отже}$$

$f(z) = \bar{z}$ не має похідної в точці z .

У випадку, коли функція задана в термінах x, y , тобто $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то диференційованість її, як умова еквівалентна існуванню похідної по z , перевірити важко. В цьому випадку корисна наступна теорема.

Теорема. Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була диференційованою в точці $z = x + iy$, необхідно і достатньо, щоб функції $u(x, y), v(x, y)$ були диференційованими в точці (x, y) як функції двох дійсних змінних x і y та виконувалися умови Коші-Римана:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Доведення див. [1, с. 31] або [2, с. 85], [3, с. 33].

При цьому виконується рівність

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Означення: Якщо функція $f(z)$ диференційована у всіх точках області G , то $f(z)$ називається аналітичною в G .

Приклад 1

Дослідити на диференційованість $f(z) = \bar{z}$.

Розв'язання

$$f(z) = x - iy, \quad u(x, y) = x, \quad v(x, y) = y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \quad \text{тобто} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}. \quad \text{Отже,}$$

$f(z)$ не диференційована в z .

Приклад 2

$v(x, y) = x + y$. Знайти $f(z)$, якщо вона диференційована.

Розв'язання

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad \text{Оскільки} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \text{то} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1,$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -1$. З останніх рівностей отримаємо, що

$$\begin{cases} u(x, y) = x + \varphi(y) \\ u(x, y) = -y + \psi(x) \end{cases} \Rightarrow u(x, y) = x - y + c, \quad f(z) = x - y + c + i(x, y).$$

Вправи

Показати, що функції диференційовані

1. $f(z) = x^2 + y^2 - 2xyi$.
2. $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$, $f'(z) = ?$
3. $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$, $f'(z) = ?$

Довести, що функції не диференційовані.

4. $\omega = |z|$.
5. $\omega = \operatorname{Re} z$.
6. Знайти a, b, c , при яких $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ буде аналітичною.

Знайти аналітичну функцію $f(z) = u + iv$.

7. $u = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$.
8. $v = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $f(2) = 0$.
9. $u = 2^x \cos(y \ln 2)$.
10. При якому λ $f(z) = y + \lambda xi$ – аналітична?

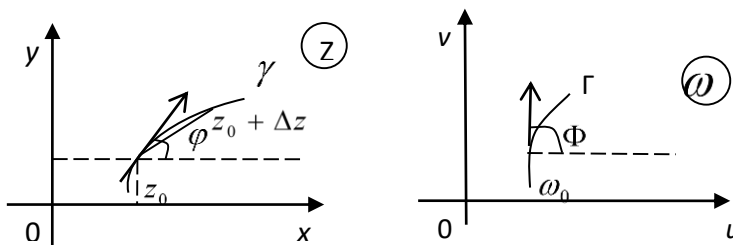
ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ І АРГУМЕНТИ ПОХІДНОЇ КОМПЛЕКСНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай $f(z)$ диференційована в точці z_0 , тоді $|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(z_0)|}{|\Delta z|} =$
 $= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)|}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$, де $|z - z_0|$, $|f(z) - f(z_0)|$ – відстані між z ,
 z_0 на площині z і їх образами $f(z)$, $f(z_0)$ на площині $\omega = f(z)$. Тоді
 $\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$ – коефіцієнт розтягу вектора $z - z_0$ при відображенні $\omega = f(z)$
площини z на площину ω .

Геометричний зміст модуля похідної: $|f'(z_0)|$ – коефіцієнт розтягу в точці z_0 при відображенні $\omega = f(z)$ площини z на площину ω .

Нехай $\omega = f(z)$ відображає площину z на площину ω і диференційована в точці z_0 .

Розглянемо криву $\gamma \in z$ і образ Γ при відображенні $\omega = f(z)$ позначимо $\Gamma \in \text{пл.}\omega$.



Якщо $z = z_0 + \Delta z \in \gamma$, то $\omega = f(z_0 + \Delta z) = \omega_0 + \Delta \omega \in \Gamma$, $\Delta z = z - z_0$ – січна γ , $\Delta \omega = f(z) - f(z_0)$ – січна Γ , $\arg \Delta z$ – кут нахилу січної Δz до Ox , $\arg \Delta \omega$ – кут нахилу січної $\Delta \omega$ до Ou .

При $\Delta z \rightarrow 0$ січні Δz , $\Delta \omega$ прямують до дотичних в точках z_0 , ω_0 до кривих γ і Γ відповідно, а $\arg \Delta z$, $\arg \Delta \omega$ до кутів φ і Φ між відповідними дотичними і осями Ox , Ou відповідно. Тоді $\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta \omega - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \Phi - \varphi$, тобто $\Phi = \varphi + \arg f'(z_0)$. Звідси $\arg f'(z_0)$ – кут повороту дотичної до кривої γ в точці z_0 площини z при переході до її образу Γ і к точці $\omega_0 = f(z_0)$.

Приклад

$\omega = az + b$ – відображає площину z на площину ω . При цьому $\omega' = a$, тобто $|\omega'| = |a|$ і $\arg \omega' = \arg a$, тобто при відображенні площина z розтягується в $|a|$ раз і повертається на кут $-\arg a$.

Вправи

Знайти коефіцієнт розтягнення і кут повороту при заданих відображеннях в заданих точках

1. $\omega = \frac{z+i}{z-i}$, $z_0 = 2i$;
 2. $\omega = 3iz + 2$, $z_0 = 1+i$;
 3. $\omega = \frac{1}{z}$, $z_0 = 3i$. Знайти z_0 , в яких коефіцієнт розтягнення дорівнює 1.
- Яка частина комплексної площини розтягується, а яка стискається (вправи 4, 5, 6).
4. $\omega = z^2$;
 5. $\omega = z^2 - 2z$;
 6. $\omega = \frac{1}{z}$;

7. $\omega = \frac{1+iz}{1-iz}$. Знайти z_0 , в яких кут повороту дорівнює нулю.

ОЗНАЧЕННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ. ПОНЯТТЯ КОНФОРМНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

Означення: Функція $f(z)$ диференційована в кожній точці області G називається аналітичною в області G .

Означення: Функція $f(z)$ називається аналітичною в точці z_0 , якщо вона аналітична в деякому околі точки z_0 .

З властивостей похідної слідує, що справедливі твердження:

1) якщо $f_1(z)$, $f_2(z)$ аналітичні в G , то $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ – аналітична всюди, де $f_2(z) \neq 0$;

2) якщо $\omega = f(z)$ в G аналітична, а $\xi = \varphi(\omega)$ аналітична в області, що є образом G при відображенні $\omega = f(z)$, то функція $F(z) = \varphi(f(z))$ аналітична в G :

3) якщо $f(z)$ аналітична в G і $|f'(z)| \neq 0$, $z \in G$, то в області D значень функції $f(z)$ визначена обернена функція $z = \varphi(\omega)$ – аналітична в D , причому $\varphi'(\omega_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

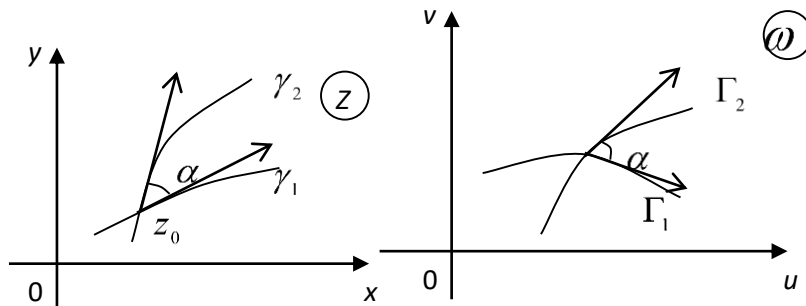
Приклад 1

$\omega = \frac{1}{z}$ – аналітична ($\omega' = -\frac{1}{z^2}$) у всій площині окрім точки $z = 0$.

Приклад 2

$\omega = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}$ – аналітична функція окрім точок $z_1, \dots, z_n$, в яких знаменник перетворюється в нуль.

Нехай $\omega = f(z)$ відображає площину z у площину ω . Розглянемо на площині z дві довільні гладкі криві γ_1, γ_2 , які перетинаються у точці z_0 .



Якщо при відображенні $\omega = f(z)$ криві γ_1, γ_2 переходять у криві Γ_1, Γ_2 відповідно (Γ_1, Γ_2 перетинаються у точці $\omega_0 = f(z_0)$), кути між кривими γ_1, γ_2 у

точці z_0 та кривими Γ_1, Γ_2 у ω_0 рівні, то кажуть, що відображення $\omega = f(z)$ у точці z_0 має властивість збереження кутів.

Нехай $\omega = f(z)$ відображення площини z у площину ω . Розглянемо у площині z трикутник з вершиною в точці z_0 та довільними нескінченно малими лінійними елементами $\Delta z_1 = z_1 - z_0$, $\Delta z_2 = z_2 - z_0$, які виходять з z_0 . Якщо при відображенні $f(z)$ він переходить у трикутник з вершиною в точці $\omega_0 = f(z_0)$, який подібний вихідному, з точністю до нескінченно малої більш високого порядку, ніж сторони вихідного трикутника, то кажуть, що відображення $f(z)$ в точці z_0 має властивість постійності розтягування.

Означення: Взаємо-однозначне відображення області G комплексної площини z на область D комплексної площини ω називається конформним, якщо це відображення у всіх точках $z \in G$ має властивість збереження кутів і постійності розтягування.

Якщо кути при відображенні не змінюють напрямлень, то кажуть про конформне відображення I-го роду. Якщо кути змінюють напрямлення на протилежні, то кажуть про конформне відображення II-го роду.

Крім того, кажуть, що відображення $\omega = f(z)$ конформне у нескінченно віддаленій точці, якщо $\omega = f(\frac{1}{z}) = F(z)$ відображає початок $z=0$ конформно у площину ω .

Теорема: Для того, щоб функція $\omega = f(z)$ реалізувала конформне відображення I-го роду області G , необхідно і достатньо, щоб в цій області функція $f(z)$ була:

1. однолистою;
2. аналітичною;
3. $f'(z) \neq 0$ для будь-якого $z \in G$;

Доведення: див. [2, с. 107], [1, 146].

Приклад 1: $\omega = az + b$ відображає площину z на ω конформно, бо $\omega' = a \neq 0$.

Приклад 2: $\omega = \bar{z}$ дзеркальне відображення відносно осі Ox , змінює напрям кутів на протилежний. Таким чином $\omega = \bar{z}$ – конформне відображення II-го роду (хоча функція не аналітична!)

Вправи

Знайти точки, в яких відображення конформне (I-го роду).

- 1) $\omega = z^3$;
- 2) $\omega = \frac{1}{z} - z$;
- 3) $\omega = \sqrt{z}$;
- 4) $\omega = z^2 + z$.

Чи конформні відображення у нескінченно віддаленій точці

- 5) $\omega = \frac{1}{z}$;

- 6) $\omega = z^3$;
 7) $\omega = az + b$;
 8) $\omega = \frac{az + b}{cz + d}$.

Покажіть, що відображення здійснюють конформне відображення II-го роду

- 9) $\omega = \bar{z}^2$;
 10) $\omega = \overline{f(z)}$, $f(z)$ задовольняє теоремі.

ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

Функція виду $\omega = az + b$ ($a \neq 0$) називається лінійною. Функція визначена та однозначна для будь-якого z та оскільки $\forall z \ \omega' = a \neq 0$, то вона здійснює конформне відображення площини z на площину ω .

При цьому відображенні у всіх точках z дотична до довільної кривої, яка проходить через z , повертається на один і той самий кут $\arg a$ і розтягує площину z у всіх точках на $|a|$.

Якщо $a=1$, то $|a|=1$, $\arg a = 2k\pi$ і розтягування та поворот відсутні, тобто функція $w = z + b$ зміщує площину z на вектор b .

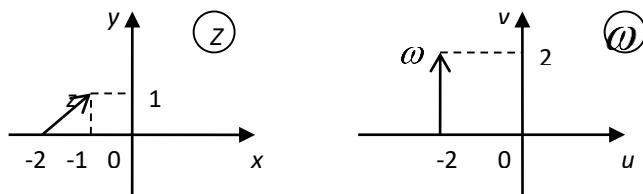
Якщо $a \neq 1$, то $w = az + b$ можна представити $\omega - \varphi = a(z - \varphi)$, де $\varphi = a\varphi + b$, тобто кожен вектор $z - \varphi$ (який виходить з φ) повертаючись на $\arg a$ та розтягує у $|a|$ разів перепадає у вектор $\omega - \varphi$.

Таким чином $\omega = az + b$ ($a \neq 1$), повертає площину z на кут $\arg a$ та розтягує у $|a|$ разів відносно точки $\varphi = \frac{b}{1-a}$.

Приклад: $\omega = (1+i)z + 2i$.

$$\varphi = \frac{2i}{-i} = -2, \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}, |1+i| = \sqrt{2}.$$

Площина z повертається на кут $\frac{\pi}{4}$ та розтягується у $\sqrt{2}$ разів відносно точки -2 .



Знайти лінійні відображення:

- яке відображує трикутник з вершинами $0, 1, i$ на подібний трикутник $0, 2, 1+i$.

2. з нерухомою точкою $1+2i$, яке переводить точку i у $b-i$.
3. яке переводить верхню півплощину на себе.
4. яке переводить верхню півплощину на нижню півплощину.
5. яке переводить верхню півплощину на праву півплощину.
6. яке переводить праву півплощину на себе.
7. яке переводить праву півплощину на ліву.
8. яке переводить смугу $0 < x < 1$ на себе.
9. яке переводить смугу $2 < y < 1$ на себе.
10. яке переводить смугу, яка обмежена прямими $y=x$, $y=x-1$ на себе.

ДРОБОВО-ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

Функція $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$ ($c \neq 0$) називається дробово-лінійною. Для $z \neq -\frac{d}{c} = \delta$ дробово-лінійна функція має похідну $\omega' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{(z-\delta)^2}$ та якщо $ad-bc \neq 0$ (випадок, коли $ad-bc = 0$ нецікавий, бо тоді $\omega = \text{const}$), то при $z \neq \delta$, $\omega'(z) \neq 0$ та відображення $\omega(z)$ здійснює конформне відображення усіх z ($z \neq \delta$).

Оскільки $\lim_{z \rightarrow \delta = -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} = \lambda$, то довізнавши $\omega(\delta) = \infty, \omega(\infty) = \lambda$, отримаємо, що $\omega(z)$ переводить розширену комплексну площину z на розширену площину ω .

З $\omega(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ знаходимо, що $z(\omega) = \mp \frac{d\omega+b}{c\omega-a}$ – обернена функція до $\omega(z)$, причому $z(\infty) = \delta, z(\lambda) = \infty$, тобто обернена функція до $\omega(z)$ – дробово-лінійна та $\omega(z)$ є однолистим відображенням розширеної площини z на розширену площину ω . Враховуючи все, що було сказано вище, можна зробити висновок, що $\omega(z)$ – конформне відображення розширеної площини z ($z \neq \delta, z \neq \infty$) на розширену площину ω .

Залишається розглянути – чи конформне відображення $\omega(z)$ у точках $z = \delta, z = \infty$?

Із визначення конформності відображення у нескінченно віддаленій точці, треба розглянути конформність відображення $\omega\left(\frac{1}{z}\right)$ у точці

$z=0$, $F(z) = \omega\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{bz+a}{dz+c}$ та $F'(0) \neq 0$ існує, тобто $F(z)$ – конформне відображення у $z=0$, значить $\omega(z)$ у точці $z = \infty$ здійснює конформне відображення.

Нехай $z = \delta$. Розглянемо функцію $z(\omega) = -\frac{d\omega+b}{c\omega-a}$, обернену до вихідної $\omega(z)$. Оскільки дробово-лінійна функція – конформне відображення, то відображення $z(\omega)$ зберігає кути та постійність розтягувань при відображенні у $\omega = \infty \rightarrow z = \delta$, але тоді і в обернену сторону відображення $\omega(z)$ (обернена до $z(\omega)$) зберігає кути та постійність розтягувань при відображенні у $z = \delta$.

Таким чином, можна зробити висновок: дробово-лінійна функція $\omega(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ здійснює конформне відображення розширеної комплексної площини z на розширену комплексну площину ω .

Теорема. Заданням відповідності трьом різним точкам розширеної площини z трьох різних точок розширеної площини ω дробово-лінійна функція визначена однозначно.

Тобто, якщо $z_1 \rightarrow \omega_1, z_2 \rightarrow \omega_2, z_3 \rightarrow \omega_3$, то $\omega(z) = \omega$ має вид

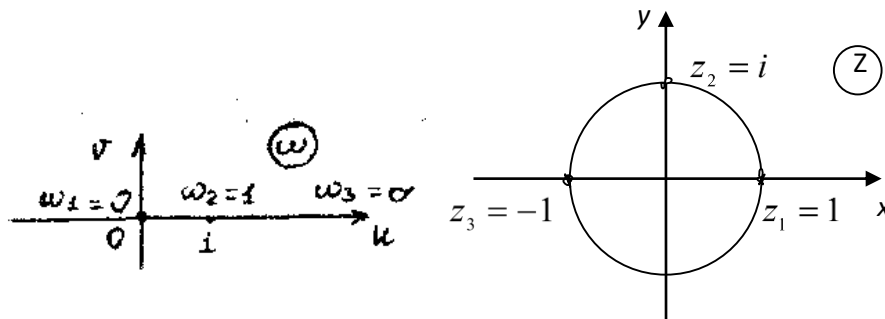
$$\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_2 - \omega} : \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Теорема: (колова властивість) дробово-лінійна функція переводить кола та прямі на площині z у кола та прямі на площині ω .

Доведення теореми див. [1, с. 162-163].

Приклад. Знайти функцію, яка конформно відображає коло $|z| < 1$ на верхню півплощину $\text{Im } \omega > 0$.

Розв'язання



Встановимо відповідність:

$$z_1 = 1 \rightarrow \omega_1 = 0, z_2 = i \rightarrow \omega_2 = 1, z_3 = -1 \rightarrow \omega_3 = \infty$$

(границя повинна переходити в границю) та повинно зберігатися напрямлення обходу області тоді, оскільки $\omega_3 = \infty$ дробово-лінійна функція

буде мати вид $\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_2 - \omega} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ або $\frac{-\omega}{1 - \omega} = \frac{1 - z}{i - z} : \frac{(1 - (-1))}{i + 1}$, $\frac{\omega}{\omega - 1} = \frac{z - 1}{z - i} \cdot \frac{i + 1}{2}$.

$$\text{Знайдемо } \omega. \quad \omega = \frac{2z - 2i}{z(i - 1) - (i - 1)} + 1 = \frac{z(i + 1) + (1 - 3i)}{z(i - 1) - (i - 1)}$$

Відмітимо, що $\omega(0) = i$, тобто $\omega(z)$ переводить коло $|z| < 1$ на півплощину $\text{Im } \omega > 0$.

Вправи

У що відображаються наступні області?

$$1. \text{ квадрат } \text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0, \omega = \frac{z - i}{z + i};$$

2. півколо $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\omega = \frac{2z-i}{2+iz}$.

Знайти дробово-лінійне відображення, яке переводить точки $-1, i, i+1$ у точки

3. $0, 2i, 1-i$;

4. $i, \infty, 1$.

Знайти дробово-лінійне відображення, яке переводить точки $-1, \infty$ у точки

5. $i, 1, 1+i$;

6. $\infty, i-1$

Знайти загальний вид дробово-лінійного відображення, яке переводить:

7. верхню півплощину на себе;

8. верхню півплощину на нижню;

9. верхню півплощину на одиничне коло;

10. верхню півплощину на праву півплощину.

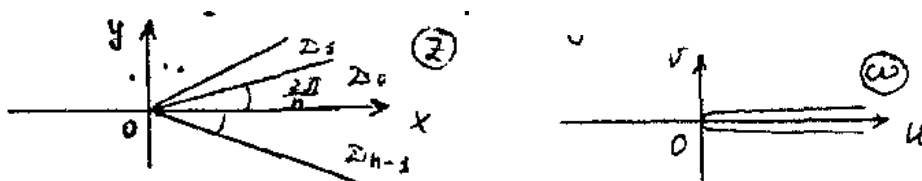
СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ. ПОВЕРХНЯ РИМАНА

Функція $\omega = z^n$ ($n = 2, 3, \dots$) називається степеневою, визначена та однозначна на всій розширеній площині z , $z = \infty$ ставимо у відповідність $\omega = \infty$. Оскільки $\omega' = nz^{n-1}$ та для будь-якого $z \neq 0$ $\omega'(z) \neq 0$, то $\omega(z)$ у всіх $z (z \neq 0, \infty)$ зберігає кути та постійність розтягувань. При $z = 0$ кути не зберігаються. Дійсно, z_1, z_2 якщо такі, що $\arg z_1 = \alpha$, $\arg z_2 = \beta$, то $\arg \omega(z_1) = n\alpha$, $\arg \omega(z_2) = n\beta$ тобто кут між $\omega(z_1)$ та $\omega(z_2)$ дорівнює $n(\alpha - \beta)$ та збільшується у n разів згідно з кутом $\alpha - \beta$ між z_1, z_2 .

Аналогічно з $z = \infty$.

Теорема. Сектори $D_k = \left\{ z \mid \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1) \right\}, k = 0, 1, \dots, n-1$ взаємно однозначно, а значить і конформно відображаються на площину ω з вирізаним променем $\arg \omega = 0$.

Доведення [1,2,3].



Причому границя $\arg z = \frac{2\pi k}{n}$ області D_k відображається у верхній берег розрізу $\arg \omega = 0$, а границя $\arg z = \frac{2\pi}{n}(k+1)$ у нижній берег розрізу, $\arg \omega = 2\pi$.

Розіб'ємо всю площину z на сектори $\overline{D_k} = \left\{ z \mid \frac{2\pi k}{n} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{n}(k+1) \right\}$, тоді

$\omega = z^n$ сектору $\overline{D_k}$ взаємно-однозначно ставить у відповідність площину ω з розрізом по променю $\arg \omega = 0$. Позначимо ω_k - вказану площину відповідну D_k , таких площин буде $n: \omega_0, \dots, \omega_{n-1}$. Для взаємно-однозначного образу всієї розширеної площини z візьмемо n „листіків” площини ω та розмістимо ці „листки” один над одним так, щоб точки з однаковими координатами були розміщені один над другим. „Склеїмо” розміщені один над одним „листки” $\omega_k (k = 0, \dots, n-1)$ по тим берегам розрізу $[0; \infty]$, які є образами одного і того ж променя $\arg z = \frac{2\pi k}{n}$, який є загальною границею двох сусідніх секторів.

Тобто, нижній берег розрізу ω_0 з'єднаємо з верхнім берегом розрізу ω_1 , вільний нижній берег розрізу ω_1 – з верхнім берегом розрізу ω_2 і так далі та, нарешті, нижній берег розрізу листка ω_{n-1} та верхній берег розрізу ω_0 (останнє з'єднання потрібно розуміти у змісті ототожнення точок з однаковими абсцисами відповідних берегів розрізів ω_{n-1} та ω_0). Крім того, у всіх площин „склеїмо” точки $z=0$ та $z=\infty$. Отриману n -„листову” замкнену поверхню називають поверхнею Римана значень функції $\omega = z^n$.

Із всього вище сказаного можна зробити висновок: функція $\omega = z^n$ здійснює взаємно-однозначне відображення розширеної площини z на поверхню Римана, яке є конформним у всіх точках площини z , крім $z=0$ та $z=\infty$.

Приклад: відобразити кут $-\frac{\pi}{4} < \arg z < 0$ на верхню півплощину.

Розв'язання. $\omega = z^4$ відображає вказаний кут на нижню півплощину $-\pi < \arg z < 0$ за властивостями степеневі функції. Тепер нижню півплощину потрібно відобразити у верхню. Це можна зробити за допомогою повороту на 180° або π радіан, тобто шукана функція має вид $\omega = -z^4$.

Вправи

- 1) відобразити кут $0 < \arg z < \pi\alpha (0 \leq \alpha \leq 2)$ на верхню півплощину;
- 2) кут $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$ на праву півплощину;
- 3) кут $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ на нижню півплощину;
- 4) кут $-\frac{\pi}{5} < \arg z < \frac{\pi}{10}$ на ліву півплощину;
- 5) кут $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ на коло $|z| < 1$;
- 6) кут $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ на коло $|z| < 1$.

Знайти образ областей при відображенні:

- 7) $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$, $\omega = iz^n + 1$;

$$8) \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi, \quad \omega = \frac{z^2 + 1}{z^2 + i};$$

$$9) 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \quad \omega = 3z^2 + i;$$

$$10) \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \frac{z^2 - 1}{iz^2 + 1}$$

ФУНКЦІЯ ЖУКОВСЬКОГО

Функція виду

$$\omega = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad z \neq 0, \infty$$

називається функцією Жуковського та відображає площину z на площину ω . Якщо до визначити $\omega(0) = \infty, \omega(\infty) = \infty$, то отримаємо відображення розширеної площини z на розширену площину ω . Оскільки $\omega' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \neq 0, (z \neq \pm 1)$, то ω виконує відображення, яке зберігає кути та постійність розтягувань у всіх точках, крім $z = \pm 1$.

Теорема: Функція $\omega = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ виконує конформне відображення середини одиничного кола на зовнішність відрізка $[-1; 1]$ площини ω . При цьому $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ відображається на нижню півплощину $\omega, |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0$ на верхню півплощину ω .

Теорема: Функція $\omega = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ конформно відображає область $|z| > 1$ на зовнішність $[-1; 1]$ площини ω . При цьому $|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0$ відображається на верхню півплощину $\omega, |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0$ на нижню півплощину ω .

Доведення теореми див. [2, 130-133].

Візьмемо дві площини ω_0, ω_1 з розрізами по відрізку $[-1; 1]$ та „склеїмо” нижній берег розриву ω_0 з верхнім берегом розрізу ω_1 , а верхній берег розрізу ω_0 - з нижнім берегом розрізу ω_1 . Отримана дволиста поверхня - поверхня Римана для функції Жуковського, на яку вона конформно відображає розширену площину z .

Приклад: Відобразити півколо $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ на праву півплощину.

Розв'язання: $\omega_1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ відображає півколо $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ на нижню півплощину $\operatorname{Im} \omega_1 < 0$. Тому відображення $\omega = i\omega_1$ буде шуканим, тобто відображати півколо на праву півплощину.

Вправи

Знайти область, у якій функція Жуковського відображає:

1) $|z| < R < 1$;

2) $|z| > R > 1$;

3) $\operatorname{Im} z > 0$;

- 4) $\operatorname{Im} z < 0$;
- 5) $1 < |z| < 2$.

Відобразити вказані області на верхню півплощину:

- 6) $|z| < 1$ з розрізом по $[\frac{1}{2}; 1]$;
- 7) $|z| < 1$ з розрізом по $[-1; 0]$, $[a; 1]$ ($0 < a < 1$);
- 8) $|z| > 1$ з розрізами $[-a; 1]$ та $[1; \infty)$, $a > 1$;
- 9) $|z| < 1$ $\operatorname{Im} z > 0$ з розрізом $[0; \alpha i]$ ($0 < \alpha < 1$);
- 10) $|z| < 1$ $\operatorname{Im} z > 0$ з розрізом $[\alpha i; i]$, $0 < \alpha < 1$.

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Функція виду $\omega = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ називається показниковою функцією, яка відображає розширену площину z на розширену площину ω ($\omega(\infty) = \infty$).

Властивості

- 1) $(e^z)' = e^z \neq 0$;
- 2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$;
- 3) $e^{z + 2\pi i} = e^z$, тобто $2\pi i$ – період показникової функції.

Теорема: показникова функція $\omega = e^z$ взаємно-однозначно та конформно відображає смугу шириною $h \leq 2\pi$, паралельну дійсній осі, на кут розчину h з вершиною в початку координат.

Наслідок: смуга $2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi$ конформно відображається на площину ω з вирізаною додатною частиною дійсної осі. Причому, нижня границя $\operatorname{Im} z = 2k\pi$ переходить у верхній берег розрізу, а $\operatorname{Im} z = 2(k+1)\pi$ – в нижній берег розрізу.

Доведення див. [3, с. 91].

Поверхня Рімана, у яку конформно відображається розширена площина z будується наступним чином: потрібно взяти нескінченно багато площин ω_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, у яких відтворений розріз по додатній частині дійсної осі. Розміщуючи площини одна під іншою та нижній берег розрізу ω_k склеїмо з верхнім берегом розрізу ω_{k+1} і т. д. Та склеїмо площини у нескінченно віддаленій точці. Отримана нескінченно-листа поверхня – поверхня Рімана.

Приклад: Відобразити $y = kx + b$ ($k \neq 0$) за допомогою функції $\omega = e^z$.

Розв'язання: $z = x + iy$ ($y = kx + b$ ($k \neq 0$))) тоді $\omega = e^x \cdot e^{i(kx+b)}$, тобто $\rho = |\omega| = e^x$,

$\varphi = \arg \omega = kx + b$. Тоді $x = \frac{\varphi - b}{k}$ та $\rho = e^{\frac{\varphi - b}{k}}$ – спіраль.

Вправи

Вияснити, у що перетворюється за допомогою $\omega = e^z$:

- 1) пряма $x = c, y = c$;

- 2) смуга $y_1 < y < y_2 (0 \leq y_1 < y_2 \leq 2\pi)$;
- 3) півсмуга $x < 0, 0 < y < y_1 \leq 2\pi$;
- 4) півсмуга $x > 0, 0 < y < y_1 \leq 2\pi$;
- 5) прямокутник $x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2; (y_2 - y_1 < 2\pi)$

Знайти відображення, яке переводить:

- 6) смугу $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ на площину;
- 7) смугу $-\pi \leq y \leq 0$ у праву півплощину;
- 8) смугу $\pi \leq y \leq 2\pi$ у ліву півплощину;
- 9) смугу $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi$ у площину;
- 10) $\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ смугу у нижню півплощину.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Функції $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

які визначені на площині z , називаються косинусом та синусом від комплексного z .

ВЛАСТИВОСТІ:

- 1) $\cos z$ – парна, $\sin z$ – непарна функції;
- 2) $\cos z, \sin z$ періодичні з періодом 2π ;
- 3) $\cos z, \sin z$ – необмежені у уявному напрямленні, тобто $\sin in \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$;
- 4) всі тригонометричні формули виконуються для $\cos z, \sin z$;
- 5) $(\cos z)' = -\sin z, (\sin z)' = \cos z$.

Оскільки, $\sin z = \cos(\frac{\pi}{2} - z)$ то достатньо розглянути функцію $\omega = \cos z$.

Теорема. Функція $\omega = \cos z$ смуги $D_k = \{z | k\pi \leq \operatorname{Re} z \leq (k+1)\pi\}, k = 0, \pm 1, \dots$ конформно відображає на площину ω з розрізами по променям $[-\infty; -1]$ та $[1; \infty]$. Причому, якщо k – парне, то верхня півсмуга $D_k (\operatorname{Im} z > 0)$ відображається у нижню півплощину ω та півпрямі $\operatorname{Re} z = k\pi, \operatorname{Re} z = (k+1)\pi (\operatorname{Im} z > 0)$ відображаються у нижній берег розрізів ω відповідно по променям $[1; \infty], [-\infty; -1]$; нижня півсмуга $D_k (\operatorname{Im} z < 0)$ відображається у верхню півплощину ω , при цьому $\operatorname{Re} z = k\pi, \operatorname{Re} z = (k+1)\pi$ відображається у верхній берег розрізів по променям $[1; \infty], [-\infty; -1]$ відповідно. При k непарному внутрішність нижньої півсмуги D_k відображається у нижню півплощину ω та $\operatorname{Re} z = k\pi, \operatorname{Re} z = (k+1)\pi (\operatorname{Im} z < 0)$ відображається у нижній берег розрізів по променям

відповідно $[-\infty; -1]$ та $[1; \infty]$; верхня півсмука D_k відображається на верхню півплощину ω та $\operatorname{Re} z = k\pi$, $\operatorname{Re} z = (k+1)\pi$ ($\operatorname{Im} z > 0$) відображається на верхній берег розрізів відповідно $[-\infty; -1]$, $[1; \infty]$.

Доведення терми див. [2, с.160].

Поверхня Римана $\omega = \cos z$, на яку конформно відображається вся площина z , отримується з нескінченного числа площин ω_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), в кожній з яких проведено розріз по променям $[1; \infty]$, $[-\infty; -1]$. Склеюючи площини по відповідним берегам розрізів $[1; \infty]$, $[-\infty; -1]$, отримуємо потрібну поверхню.

Приклад. З'ясувати, у що перетворюється пряма $x = c$ функцією $\omega = \cos z$.

Розв'язання:

$$\omega(c + iy) = \frac{e^{ci-y} + e^{-ci+y}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos c + i \sin c)}{2} + \frac{e^y(\cos c - i \sin c)}{2} = \cos c \frac{e^{-y} + e^y}{2} + i \sin c \frac{e^{-y} - e^y}{2}.$$

$$\text{Тоді } u = \cos c \frac{e^{-y} + e^y}{2}, \quad v = \sin c \frac{e^{-y} - e^y}{2}$$

$$\text{або } u^2 = \cos^2 c \frac{e^{-2y} + 2 + e^{2y}}{4}, \quad v^2 = \sin^2 c \frac{e^{-2y} - 2 + e^{2y}}{4}.$$

$$\frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1.$$

Тобто $w = \cos z$ відображає пряму $x = c$ у гіперболу $\frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1$.

Вправи

З'ясувати, у що перетворюється при відображенні $\omega = \cos z$

- 1) $y = c$;
- 2) $y = kx + b$;
- 3) смуга $y_1 < y < y_2$ ($0 \leq y_1 < y_2 \leq 2\pi$);
- 4) півсмука $x < 0, 0 < y < y_1 \leq 2\pi$;
- 5) прямокутник $x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2$; ($y_2 - y_1 < 2\pi$);
- 6) півсмука $0 < x < \pi, y < 0$;
- 7) півсмука $0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 0$;
- 8) півсмука $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0$;
- 9) смуга $0 < x < \pi$;
- 10) півсмука $0 < y < y_1 \leq 2\pi, x > 0$.

ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ. ТОЧКА РОЗГАЛУДЖЕННЯ

Означення: функція, обернена до функції $\omega = e^z$, називається логарифмічною та позначається $z = \operatorname{Ln} \omega$. Змінюючи позначення, можна записати $\omega = \operatorname{Ln} z$.

З означення:

1) $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$;

2) крім того $z = e^\omega = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$, тобто $|z|e^{i \arg z} = e^u e^{iv}$, значить $u = \ln|z|, v = \arg z + 2k\pi$, $\omega = u + iv = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$. Таким чином, кожному z відповідає нескінченно багато значень $\operatorname{Ln} z$, тобто $\omega_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Функції $\omega_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ називаються вітками багатозначної функції $\omega = \operatorname{Ln} z$. Кожна вітка ω_k виконує конформне відображення k -го листа поверхні Римана показникової функції на відповідну смугу комплексної площини, на якій визначена показникова функція.

Нехай C – замкнута крива в площині z , яка не містить всередині себе точки $z=0$, тоді якщо z пробігає криву C $\omega = \operatorname{Ln} z$, опише замкнуту криву Γ у площині ω .

Якщо замкнута крива C містить всередині себе точку $z=0$, то при обході точки z кривою C її аргумент міняється з $\arg z$ на $\arg z + 2\pi$ та значить значення $\operatorname{Ln} z$ при обході z навколо кривою зміниться на 2π , тобто від вітки ω_k ми перейдемо до ω_{k+1} при обході z навколо точки $z=0$. Тоді $z=0$ називається точкою розгалуження. Такі самі дії можна провести і для точки $z=\infty$.

Враховуючи взаємно-однозначність відображення віток ω_k та, те, що $(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z} \neq 0$ отримали, то вітки ω_k виконують конформні відображення.

Приклад: знайти $\operatorname{Ln}(-2)$.

Розв'язання $\operatorname{Ln}(-2) = \ln|-2| + i(\arg(-2) + 2k\pi) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi) = \ln 2 + i(2k+1)\pi$:

Вправи

Знайти значення:

1) $\operatorname{Ln}(1)$;

2) $\operatorname{Ln}(1+i)$;

3) $\operatorname{Ln}(-1)$;

4) $\operatorname{Ln}(iy)$;

5) $\operatorname{Ln}(x)$

У що перетворюються при відображенні $\omega = \operatorname{Ln} z$

6) $|z| = r$;

7) $\arg z = \varphi$;

8) $0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$;

9) сектор $|z| < 1, 0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$;

10) спіраль $\rho = Ae^{k\varphi}, A > 0$.

РАДИКАЛ. ЗАГАЛЬНА СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

Функція $\omega = \sqrt[n]{z}$ – обернена по відношенню до функції $z = \omega^n (n = 2, 3, \dots)$. Функція $\omega = \sqrt[n]{z}$ є n -значною функцією, при цьому функції $\omega_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$ називаються вітками вихідної функції. Кожна вітка ω_k виконує конформне відображення k -го листа поверхні Римана функції $z = \omega^n$ на відповідний кут площини ω (див. властивості функції $\omega = z^n$). $\frac{2k\pi}{n} < \arg \omega < \frac{2(k+1)\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$.

При цьому при обході точки z по замкнутій кривій, яка містить 0 її аргумент змінюється на 2π , значить і $\sqrt[n]{z}$ змінить своє значення (при обході z по кривій) з ω_k на ω_{k+1} , тобто $z=0$ – точка розгалуження функції $\omega = \sqrt[n]{z}$ (аналогічно і $z = \infty$).

Загальна степенева функція $\omega = z^a, a = \alpha + i\beta$ – визначається як $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$ багатозначна функція, яка має звичайні властивості степеневої функції:

- 1) $z^a z^b = z^{a+b}$;
- 2) $z^a : z^b = z^{a-b}$;
- 3) $(z^a)^b = z^{ab}$;

крім того, точка розгалуження $z=0, z = \infty$.

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

$\omega = \arccos z$ – обернена до $z = \cos \omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}, 2z = e^{i\omega} + e^{-i\omega}$ або $e^{2i\omega} + 1 - 2ze^{i\omega} = 0$. Розв'язуючи квадратне рівняння відносно $e^{i\omega}$, отримаємо $e^{i\omega} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ та $\omega = \arccos z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ – багатозначна функція з точками розгалуження $z = \pm 1, z = \infty$.

Приклад. Знайти i^i .

Розв'язання

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln|i| + i(\arg i + 2k\pi))} = e^{i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Вправи

Обчислити:

- 1) 1^i ;
- 2) $(1+i)^{-i}$;
- 3) $(-i)^{1+i}$;
- 4) $\arccos(i)$;
- 5) $\arcsin(i)$

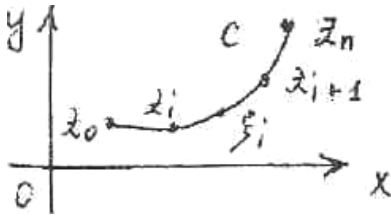
Знайти, у що відображає вітки функції $\omega = \sqrt{z}$

- 6) $\arg z = \varphi$;

- 7) кут $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$;
 8) сектор $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$;
 9) $\omega = \sqrt[3]{z}, \arg z = \varphi$.
 10) $\omega = \sqrt[3]{z}$ кут $0 < \arg < \frac{\pi}{2}$.

ІНТЕГРАЛ ВІД ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ПО КУСОЧНО-ГЛАДКОМУ КОНТУРУ

Нехай C - крива на площині z , а функція $\omega = f(z)$ визначена вздовж кривої C . Розіб'ємо криву C з довільними точками $z_0, \dots, z_n$ та виберемо на дузі $z_i z_{i+1}$ довільні точки ξ_i .



Сума $\Omega = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(z_{i+1} - z_i)$ - інтегральна сума для даного розбиття та

вибраних точок, позначимо λ - максимальну довжину дуг $z_i z_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Означення: число I називається інтегралом функції $f(z)$ вздовж кривої C , а функція $f(z)$ називається інтегрованою вздовж кривої C , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon)$, що для будь-якого розбиття кривої, параметр якого $\lambda < \delta$ виконується нерівність $|I - \Omega| < \varepsilon$ незалежно від вибраних точок.

Позначимо: $I = \int_C f(z) dz$.

Теорема: Нехай C - кусково-гладка крива, а $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - кусково-неперервна та обмежена, то $f(z)$ інтегрована уздовж C та

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C u dy + v dx$$

Доведення цього факту можна знайти [1, с.39].

Крім того, оскільки інтеграл від комплексної функції виражається через звичайні криволінійні інтеграли, то всі властивості звичайного інтегралу виконуються у випадку інтегралу від комплексної функції:

$$1) \int_C (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_C f dz + \beta \int_C g dz;$$

$$2) \int_{C_1 \cup C_2} f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2} f dz;$$

$$3) \int_C f dz = - \int_{-C} f dz$$

4) $\left| \int_C f dz \right| \leq ML$, де $|f| \leq M$, L – довжина кривої C і т.д.

Приклад: обчислити $\int_C \bar{z} dz$, де C – дуга $y = x^2, x \in [0, 1]$.

Розв'язання:

$$\bar{z} = x - iy,$$

$$\begin{aligned} \int_C \bar{z} dz &= \int_C x dx + y dy + i \int_C x dy - y dx = \int_0^1 (x + x^2 \cdot 2x) dx + i \int_0^1 (x \cdot 2x - x^2) dx = \int_0^1 (2x^3 + x) dx + \\ &+ i \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + i \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + i \frac{1}{3} = 1 + \frac{i}{3}. \end{aligned}$$

Вправи:

Обчислити $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$

- 1) по півколу $|z|=1, y \geq 0$ та $\sqrt{1}=1$;
- 2) по півколу $|z|=1, y \geq 0$ та $\sqrt{1}=-1$;
- 3) $|z|=1$ та $\sqrt{1}=1$;
- 4) $|z|=1$ та $\sqrt{-1}=+i$;
- 5) $\int_C |z| \cdot \bar{z} dz$, C – замкнений контур, який складається з

верхнього півкола $|z|=1$ та відрізка $-1 \leq x \leq 1, y=0$.

Обчислити $\int_C \operatorname{Ln} z dz$:

- 6) $|z|=1$ та $\operatorname{Ln} 1=0$;
- 7) $|z|=1$, $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$;
- 8) $|z|=R, \ln R = \operatorname{Ln} R$;
- 9) $\int_C |z| dz$ C : радіус-вектор $z=2-i$;
- 10) $\int_C x dz, \int_C y dz$ C : початок шляху в точці $z=1$.

ТЕОРЕМА КОШІ

Теорема Коші 1: Нехай у однозв'язній області G задана однозначна аналітична функція $f(z)$. Тоді інтеграл від цієї функції $f(z)$ по будь-якому замкнутому контуру Γ , який цілком лежить в області G , дорівнює нулю, тобто

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

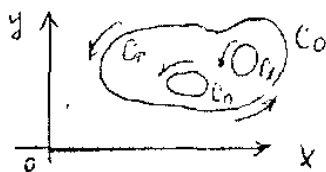
Теорема Коші 2: Якщо функція $f(z)$ є аналітичною функцією у однозв'язній області G , обмеженої кусково-гладким контуром C , та неперервна у замкнутій області G , то

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Наслідок: нехай $f(z)$ є аналітичною функцією у багатозв'язній області G , обмеженої ззовні контуром C_0 , а з середини – контурами $C_1, \dots, C_n$ та $f(z)$ неперервна у замкнутій області G . Тоді

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

де C – повна границя $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$, причому обхід границі C виникає у додатковому напрямку, тобто, область при обході зліва.



При цьому $\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz$ ($C_1, \dots, C_n$ обходяться у додатковому напрямку, тобто проти часової стрілки).

Доведення: див. [1, с.41].

Наслідок. В умовах теореми Коші для будь-якої кусочно-гладкої кривої, яка з'єднує точки z_0 та z_1 інтеграл від $f(z)$ не залежить від вибраного шляху.

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D , тоді розглянемо функцію $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(z)dz$ – інтеграл не залежить від шляху інтегрування, який з'єднує точки z та z_0 (в силу теореми Коші).

Теорема. Нехай $f(z)$ визначена та неперервна у однозв'язній області D , а інтеграл від неї по будь-якому замкнутому контуру $C \subset D$ дорівнює нулю, тоді

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi$$

($z, z_0 \in D$) є аналітичною функцією в D та $\Phi'(z) = f(z)$.

Доведення: див. [1, с.44].

Помітимо, що для аналітичної $f(z)$ умови теореми виконані.

Зауваження: в умовах теореми $\Phi(z)$ – первісна до функції $f(z)$, тоді в силу теореми не важко отримати формулу типу Ньютона-Лейбніца.

У межах умов, вказаних у теремі справедлива формула

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\xi) d\xi = F(z_2) - F(z_1),$$

де $F(z)$ - довільна первісна функції $f(z)$ на області D .

Приклад: обчислити $\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz$

Розв'язання. Оскільки $3z^2 + 2z$ - аналітична на всій площині z , а $F(z) = z^3 + z^2$ - первісна, то

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz = z^3 + z^2 \Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^{1-i}.$$

Вправи

Обчислити:

1) $\int_{AB} f(z) dz$, $f(z) = (y+1) - xi$, AB - шлях, який з'єднує точки $z_A = 1, z_B = -i$;

2) $\int_i^{1+i} z dz$;

3) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-4}$, γ - еліпс $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$;

4) $\int_{AB} z^2 dz$ AB з'єднує точки $1, i$;

5) $\int_{\gamma} z^{10} dz$, γ - еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

6) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$, γ - коло $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$;

7) $\int_{AB} e^z dz$ AB - з'єднує точки $1+i, 2i$;

8) $\int_i^{i+1} (z^3 + 2z) dz$;

9) $\int_{2i}^1 z e^z dz$;

10) $\int_{\gamma} e^z \sin z dz$, $\gamma: |z| = R$.

ФОРМУЛА КОШІ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА МОДУЛЯ

Теорема. Нехай функція $f(z)$ - аналітична в однозв'язній області D . Тоді для будь-якої точки $z_0 \in D$ і для будь-якого замкнутого кусково-гладкого контуру l , який цілком лежить в області D та містить точку z_0 всередині себе, виконується рівність

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

де інтегрування виконується у додатному напрямку замкнутого контуру l .

Доведення: див. [2, с.215], [1, с.46], [3, с. 169].

Наслідок: нехай l - коло радіусу R з центром z_0 , тоді використовуючи формули Коші можна отримати теорему, яка уточнює відому теорему Вейерштрасса у випадку аналітичної функції.

Теорема.(принцип максимуму модуля аналітичної функції) Нехай функція $f(z)$, тотожно не рівна постійній, є аналітичною в області D і є неперервною в замкненій області $\bar{D}$. Тоді максимальне значення $|f(z)|$ досягається тільки на границі області $\bar{D}$.

Доведення стор.220, 201 [3], 49[1].

Крім цього, має місце **теорема:**

Нехай $f(z)$ аналітична в області G та неперервна в $\bar{G}$. Тоді у внутрішніх точках області G існує похідна $f'(z)$ будь-якого порядку,

$$\text{причому має місце наступна формула } f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi,$$

де Γ - границя області G .

Доведення див. [2, с. 222-223].

Приклад: Знайти $\int_l \frac{\cos z}{(z-1)(z+3)} dz$, $l: |z|=2$.

Розв'язання:

Розглянемо функцію $f(z) = \frac{\cos z}{z+3}$, тоді інтеграл $\int_l \frac{\cos z}{z-1} dz$ по формулі Коші ($z_0=1$ знаходиться в середині контуру $|z|=2$) дорівнює

$$2\pi i \frac{\cos 1}{1+3} = \frac{\pi}{2} \cos 1 \cdot i.$$

Вправи.

Обчислити

1. $\int_l \frac{dz}{z^3 + 4z}$ $l: |z|=3$;
2. $\int_l \frac{\sin z}{(z-2i)^3} dz$ $l: |z|=3$;
3. $\int_l \frac{\sin z}{z^2 - 7z + 10} dz$ $l: |z|=3$;
4. $\int_l \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$ $l: |z-i|=1$;
5. $\int_l \frac{e^z dz}{z^2 - 1}$ $l: |z|=2$;

6. $\int_l \frac{dz}{z^2 + 9} \quad l: |z - 2i| = 2;$
7. $\int_l \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz \quad l: |z| = 4;$
8. $\int_l \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2} dz \quad l: |z - 1| = 1;$
9. $\int_l \frac{\cos z}{(z - 1)(z + 3)} dz \quad l: |z| = 4;$
10. $\int_l \frac{dz}{z^3 + 4z} \quad l: |z| = 3.$

ЦІЛІ ФУНКЦІЇ. ТЕОРЕМА ЛІУВІЛЯ. ОСНОВНА ТЕОРЕМА АЛГЕБРИ

Означення: Аналітична на всій комплексній площині функція називається цілою функцією.

Теорема (Ліувіля). Нехай $f(z)$ - ціла функція, а її модуль обмежений, тоді ця функція – константа.

Доведення [3, с.173], [2, с.225].

Приклад. $\omega = \sin z$ - ціла функція і $\sin z \neq \text{const}$, отже $|\sin z|$ - необмежений, тобто існує z такий, що $|\sin z| > 1$.

Застосування теореми Ліувіля є основною теоремою алгебри:

Всякий многочлен $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ ($n \geq 1, c_n \neq 0$) має хоча б один нуль.

Доведення слідує з того, що якщо нулів немає, то функція $\omega(z) = \frac{1}{c_0 + \dots + c_n z^n}$ має обмежений модуль і є цілою, не буде константою. Це протиречить теоремі Ліувіля. Отже, припущення щодо відсутності нуля – невірне.

РОЗКЛАДАННЯ ФУНКЦІЙ В РЯД ТЕЙЛОРА. ОЦІНКА КОЕФІЦІЄНТІВ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ

Теорема. Функція $f(z)$, аналітична в середині кола $|z - z_0| < R$ розкладається в цьому колі в степеневий ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Коефіцієнти $c_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ визначаються по формулі $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ або $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, де l - будь-який кусочно-гладкий замкнений контур, який повністю належить колу та знаходиться навколо точки z_0 . Ряд визначений однозначно.

Доведення теореми див. [2, с.225], [1, с.64].

Нехай $f(z)$ аналітична в колі $|z - z_0| < R$. Прийнемо за C_ρ - будь-яка окружність з центром в точці z_0 , що цілком лежить в колі $|z - z_0| < R$, і через $M(\rho)$ - максимум модуля $f(z)$ на колі C_ρ , тоді для коефіцієнтів ряду Тейлора вірна оцінка

$$|c_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

які носять назву нерівність Коші.

Приклад. Розкласти в ряд $f(z) = \frac{1}{(1-z)(1+z)}$ для $|z| < 1$.

Розв'язання.

$$\frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \left(\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n (z)^n + (z)^n) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} ((z)^{2k})$$

Вправи.

Розкласти в ряд Тейлора в $z_0 = 0$ функції:

$$1. f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)};$$

$$2. f(z) = \frac{2z-5}{z^2-5z+6};$$

$$3. f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)};$$

$$4. f(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)};$$

$$5. f(z) = \sin^2 z;$$

$$6. f(z) = \cos^3 z;$$

$$7. f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z;$$

$$8. f(z) = e^z \sin z;$$

$$9. f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z};$$

$$10. f(z) = \frac{1-z}{z} \ln(1-z) \quad |z| < 1.$$

НУЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ. ІЗОЛЬОВАНІСТЬ НУЛІВ. ТЕОРЕМА ЄДИНОСТІ

Означення. Нехай $f(z)$ аналітична в області G . Точка $z_0 \in G$ називається нулем $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$.

Нехай $f(z)$ розкладається в околі z_0 в ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, тоді якщо z_0 – нуль $f(z)$, то $c_0 = 0$. Якщо $c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0, c_k \neq 0$, z_0 – називається нулем порядку k .

Якщо z_0 – нуль $f(z)$ порядку k , то $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, де $\varphi(z)$ – аналітична функція в околі z_0 і z_0 не є нулем функції $\varphi(z)$.

Теорема. Нехай $f(z)$ аналітична в області G і обертається в нуль в різноманітних точках $z_n \in G$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Якщо послідовність $\{z_n\}$ сходиться до $z_0 \in G$, $f(z) = 0$ в області G .

Доведення теореми див. [2. с.263], [1, с.72].

Наслідок 1. Нулі аналітичних функцій – ізольовані точки.

Наслідок 2. Нехай $f(z)$ аналітична в області G , тоді в будь-якій обмеженій замкненій підобласті $\overline{G'} \subset G$ функція $f(z)$ має скінчене число нулів.

Наслідок з теореми являє собою **теорему єдиності**:

Нехай $f(z)$ і $\varphi(z)$ аналітичні в G . Якщо в G існує деяка підпослідовність різноманітних точок $\{z_n\}$, що сходиться до деякої точки $z_0 \in G$, в яких f і φ співпадають, то $f(z) \equiv \varphi(z)$ в G .

З теореми єдиності легко отримати:

Наслідок 1: Якщо $f(z)$ і $\varphi(z)$ аналітичні в G і співпадають на деякій кривій, що належить G , то $f(z) \equiv \varphi(z)$.

Наслідок 2: Якщо $f_1(z)$, $f_2(z)$ аналітичні в G_1, G_2 , відповідно і $G \subseteq G_1 \cap G_2$, область така, що $f_1(z) = f_2(z)$ ($z \in G$), то існує єдина аналітична функція $F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1, \\ f_2(z), & z \in G_2. \end{cases}$

Приклад. Визначити нулі та їх порядок $f(z) = z^2 + 9$.

Розв'язання:

Нулями є точки $z = \pm 3i$. Покажемо, що нулі мають порядок 1. Дійсно, $f(z) = (z - 3i)(z + 3i)$ для нуля $z = 3i$, $f(z) = (z - 3i)(z + 3i)$ та $\varphi(3i) = 9i \neq 0$, тобто $3i$ – нуль першого порядку. Аналогічно для $z = -3i$.

Вправи.

Знайти порядок нуля $z=0$ для функцій:

1. $z^2(e^{z^2} - 1)$;

2. $6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$;

3. $f(z) = \frac{z^2 + 9}{z^4}$;

4. $f(z) = z \sin z$;

5. $f(z) = (1 - e^z)(z^2 - 4)^3$;

6. $f(z) = 1 - \cos z$;

7. $f(z) = \frac{\sin 3z}{z}$;

8. $f(z) = \sin z^3$;

9. $f(z) = \cos^3 z$;

10. $f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3$.

АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ ЯК АНАЛІТИЧНІ ПРОДОВЖЕННЯ

Нехай $f_1(z)$ аналітична в G_1 та $z_0 \in G_1$. Розкладемо $f_1(z)$ в степеневий ряд в околі точки

$$z_0 : f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Тоді можливі два випадки:

1) радіус збіжності ряду не більший відстані від z_0 до границі області G_1 .

В цьому випадку розклад не виводить первісну аналітичну функцію за межі області G_1 .

2) радіус збіжності ряду більший за відстань від z_0 до границі

Нехай G_2 — коло збіжності ряду, $G_2 \not\subset G_1$ та $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, причому аналітична функція $f_2(z)$, що задана рядом в G_2 співпадає з $f_1(z)$ в середині $G_1 \cap G_2$, тобто говорять, що f_2 є аналітичним продовженням f_1 в G_2 . Причому, за теоремою про єдиність, це продовження єдине. Міркуючи аналогічно для деяких $z_1 \in G_2, z_2 \in G_3$ і т.д. отримаємо аналогічне продовження $f_1(z)$ вздовж ланцюга $G_1, G_2, G_3, \dots$. Будуючи різноманітні ланцюги областей, що виходять за G_1 , ми отримаємо аналітичне продовження $f_1(z)$ на область, що містить G_1 .

Означення. Функція $F(z)$, отримана шляхом аналітичного продовження вздовж різноманітних ланцюгів, що виходять з області G_1 , первинного задання $f_1(z)$, називається повним аналітичним продовженням функції $f_1(z)$.

Розглянемо ряди

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Степеневі ряди сходяться по всій z - площині. Крім цього, e^z , $\sin z$, $\cos z$ - задані по всій площині і є аналітичними, причому, $f_1(z) = e^z$, $\sin z = f_2(z)$, $\cos z = f_3(z)$ для $z \in \mathbb{R}^1$ і по теоремі єдиності $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, тобто e^z , $\sin z$, $\cos z$ - аналітичні продовження e^x , $\sin x$, $\cos x$ з дійсної осі.

Більш детально див. [1, 2, 3].

РОЗКЛАДАННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ В РЯД ЛОРАНА

Теорема. Нехай $f(z)$ аналітична в кільці $R_0 < |z - z_0| < R_1$, тоді вона в цьому кільці однозначно визначена рядом Лорана, що збігається

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Доведення теореми див. [2, с.282], [1, с.110].

Приклад. Розкласти в ряд функцію $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+3)}$ $1 < |z| < 3$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-i)(z+3)} &= \frac{3}{(3+i)(z+3)} - \frac{i}{(3+i)(z-i)} = \frac{1}{3+i} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{3}\right)} - \\ &- \frac{i}{3+i} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{z}} = \frac{1}{3+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n - \frac{i}{3+i} \cdot \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n = \frac{1}{3+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} z^n - \\ &- \frac{1}{3+i} \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} z^{-(n+1)} = \frac{1}{3+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} z^n - \frac{1}{3+i} \sum_{n=-\infty}^{-1} i^{-n} z^n \end{aligned}$$

Вправи.

Розкласти в ряд Лорана в околі точки

$$1. f(z) = \frac{1}{z-2}, z_0 = 0;$$

$$2. f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, z_0 = 0, z_0 = 1;$$

$$3. f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)}, z_0 = -1, 0 < |z+1| < 3;$$

$$4. f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, z_0 = 0;$$

$$5. f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}, z_0 = 1, 1 < |z-1| < 2;$$

$$6. f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}, z_0 = 1;$$

$$7. f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}, z_0 = 1;$$

$$8. f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}, 0 < |z| < \infty;$$

$$9. f(z) = \cos \frac{1}{z}, z_0 = 0;$$

$$10. f(z) = \ln z, z_0 = 0.$$

КЛАСИФІКАЦІЯ ІЗОЛЬОВАНИХ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК. НЕСКІНЧЕННО ВІДДАЛЕНА ОСОБЛИВА ТОЧКА. КРИТЕРІЙ ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ, ЯКА УСУВАЄТЬСЯ

Означення. Нехай z_0 називається ізольованою особливою точкою $f(z)$ - якщо $f(z)$ аналітична функція в кільці $0 < |z - z_0| < R$, а z_0 - особлива точка $f(z)$ (тобто в z_0 $f(z)$ не є аналітичною).

В кільці $f(z)$ розкладається в ряд Лорана; отримаємо один з трьох випадків:

$$1) f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

$$2) f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

$$3) f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

У першому випадку z_0 називається особливою точкою, яка усувається.

У другому випадку z_0 називається полюсом порядку m .

У третьому випадку z_0 називається істотною особливою точкою.

Теорема. Нехай z_0 особлива точка $f(z)$, яка усувається, тоді існує скінчений

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$$

Таким чином, $f(z)$ можна до визначити в точці z_0 значенням c_0 і вона буде аналітичною в колі $|z - z_0| < R$.

Теорема. Якщо $f(z)$ аналітична в $0 < |z - z_0| < R$ та обмежена, то z_0 - особлива точка $f(z)$, яка усувається.

Доведення теореми див. [1, с.212], [2, с. 289].

Нехай $f(z)$ аналітична в деякому околі нескінченно віддаленої точки $|z| > R$. Припустимо, що $z = \frac{1}{\omega}$ при цьому $z = \infty$, перейде в $\omega = 0$. Функція $\varphi(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ аналітична в околі $\omega = 0$. Нехай розклад $\varphi(\omega)$ в ряд Лорана в околі

$\omega = 0$ має вигляд $\varphi(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^1 \omega^n$. Повертаючись до змінної $z = \frac{1}{\omega}$, маємо

$$f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n, \quad C_n = C_{-n}^1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1. Якщо в отриманому розкладі $f(z)$ немає членів з додатними степенями, то $z = \infty$ - особлива точка, яка усувається.

2. Якщо в розкладі $f(z)$ скінчене число членів з додатними степенями, то $z = \infty$ - поліус.

3. Якщо в розкладі $f(z)$ нескінчене число членів з додатними степенями, то $z = \infty$ - істотно особлива точка.

Приклад. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Розв'язання:

$f(z)$ - аналітична, крім $z = 0$ $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ перша чудова границя. Таким чином, $z = 0$ - особлива точка, яка усувається.

КРИТЕРІЙ ПОЛЮСА

Нехай $f(z)$ аналітична в $0 < |z - z_0| < R$.

Теорема. Для того, щоб z_0 було полюсом функції $f(z)$ необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$$

Доведення теореми див. [2, с. 293], [1, с. 114].

Зауваження: Якщо z_0 - полюс порядку m функції $f(z)$, то її можна представити у вигляді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$, де $\varphi(z_0) \neq 0$ і $\varphi(z)$ аналітична в колі $|z - z_0| < R$

Приклад 1. $f(z) = \frac{z+1}{(z^2+4)(z-3)^2}$, де $z = 2i, z = -2i$ - полюси першого порядку, $z = 3$ - полюс другого порядку.

Приклад 2. $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$. Знайти полюса.

Розв'язання: $\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{\sin z}{z^3} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{\sin z}{z} \right| \cdot \frac{1}{|z^2|} = \infty$, т. я. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, а $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} = \infty$.

Таким чином, $f(z) = \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{z^2}$, де $\frac{\sin z}{z}$ в точці $z = 0$ - аналітична, отже $z = 0$ - полюс другого порядку.

ТЕОРЕМА СОХОЦЬКОГО-ВЕЙЄРШТРАССА

Нехай z_0 - істотна особлива точка функції $f(z)$ аналітичної в області $0 < |z - z_0| < R$.

Теорема (Сохоцького-Вейєрштрасса). Яке б не було комплексне число W (скінчене або нескінчене), існує така послідовність $\{z_n\}$, що

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = W.$$

Доведення теорема див. [2, с.294], [1, с.115].

Приклад. $f(z) = \sin \frac{1}{z}$. Знайти особливі точки.

Розв'язання: $z = 0$ - ізолювана особлива точка, так як в інших z $f(z)$ - аналітична.

$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1}}$, тобто в розкладі в ряд Лорана нескінченно багато від'ємних степеней. Отже, $z = 0$ - істотно особлива точка.

Вправи до пунктів 24, 25, 26.

1. Довести, що z_0 - особлива точка, яка усувається.

1) $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z - 2}, z_0 = 2;$

2) $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^3 + 8}, z_0 = \infty.$

2. Довести, що z_0 - полюс.

1) $f(z) = \frac{4}{(z^2 + 9)^3}, z_0 = 3i;$

2) $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}, z_0 = 0.$

3. Довести, що z_0 - істотно особлива точка.

1) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}, z_0 = 0;$

2) $f(z) = e^{2z}, z_0 = \infty.$

4. Знайти особливі точки.

1) $f(z) = \frac{z}{1 - \sin z};$

2) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}};$

3) $f(z) = \frac{3}{(z^2 + 1)^3};$

4) $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}.$

РАЦІОНАЛЬНІ І МІРОМОРФНІ ФУНКЦІЇ

Означення. Цілою називається функція $f(z)$, аналітична в усіх точках розширеної площини z , за виключенням нескінченно віддаленої точки.

Якщо $z = \infty$ полюс $f(z)$ порядку m , то $f(z)$ має розклад Лорана в $z = \infty$ у вигляді $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m$ ($c_m \neq 0$) - ціла раціональна функція степені m .

Якщо $z = \infty$ істотно особлива, то $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$ - ціла трансцендентна функція.

Означення. Міроморфною називається така аналітична функція $f(z)$, яка в скінченній частині комплексної площини z не має інших особливих точок, крім полюсів.

Окремими класами міроморфних функцій є цілі та дробово-раціональні функції.

Дробово-раціональна функція - $f(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$, $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

Теорема. Однозначна функція $f(z)$, всі особливості якої в розширеній комплексній площині є полюси, є дробово-раціональною функцією.

Доведення теореми див.[2, с.301].

ОЗНАЧЕННЯ ЛИШКА. ОБЧИСЛЕННЯ ЛИШКІВ

Нехай z_0 - ізолювана особлива точка функції $f(z)$, тоді в розкладі в ряд Лорана функції $f(z)$ в точці z_0 коефіцієнт

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz,$$

де C - довільний замкнутий контур, що містить в середині себе єдину особливу точку z_0 функції $f(z)$ і обходить її в додатному напрямі.

Означення. Лишком $f(z)$ в ізолюваній особливій точці z_0 називається комплексне число, що дорівнює $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$.

Позначається цей факт, як $\text{res } f(z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$.

Можливі наступні можливості:

- 1) z_0 - особлива точка, яка усувається, тоді $\text{res } f(z_0) = 0$;
- 2) z_0 - полюс першого порядку $f(z)$, тоді $f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$ і $c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$, тобто $\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$.

Приклад. $f(z) = \frac{\sin z}{2z^2}$. Тоді $z = 0$ - полюс першого порядку
 $\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} z \frac{\sin z}{2z^2} = \frac{1}{2}$.

3) z_0 - полюс m -го порядку, тоді

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + \dots$$

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \dots$$

$$\text{і } \text{res } f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

Приклад. $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$. Тоді $z = -1$ - особлива; полюс другого порядку,

тобто $m=2$.

$$\operatorname{res} f(-1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} ((z+1)^2 \frac{1}{(z+1)^2})$$

$$= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} (1) = \lim_{z \rightarrow -1} 0 = 0$$

Вправи.

Обчислити:

$$1) \operatorname{res} f(0) \quad f(z) = \frac{1}{z(z+3)};$$

$$2) \operatorname{res} f(0) \quad f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)};$$

$$3) \operatorname{res} f(0) \quad f(z) = \frac{1-z}{1-\cos z};$$

$$1) \operatorname{res} f(\infty) \quad f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Знайти лишки по всім особливим точкам:

$$1) f(z) = \frac{1}{z+z^3};$$

$$2) f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)};$$

$$3) f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^3};$$

$$4) f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3};$$

$$5) f(z) = \frac{1}{\sin z};$$

$$6) f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

ОСНОВНА ТЕОРЕМА ТЕОРІЇ ЛИШКІВ

Теорема. Нехай $f(z)$ аналітична функція в замкненій області $\bar{G}$ за виключенням скінченного числа ізольованих особливих точок z_k ($k=1,2,3,\dots,n$), що лежать в середині G , тоді

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k),$$

де C - повна границя області G , що проходить в додатному напрямі.

Доведення теорема див. [2, с.305], [1, с.122].

Приклад. $\int_C \frac{z}{z^2-1} dz \quad C: |z| \leq 2.$

Оскільки $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$ має дві особливі ізолювані точки $z_1 = -1, z_2 = 1$, що лежать в середині контуру C , то

$$\int_c \frac{z}{z^2 - 1} dz = 2\pi i (\operatorname{res} f(1) + \operatorname{res} f(-1))$$

$$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{z+1} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z}{z-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Таким чином, } \int_c \frac{z}{z^2 - 1} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Вправи.

Обчислити:

$$1) \int_c e^{\frac{3}{z}} dz \quad C: |z| = 1;$$

$$2) \int_c \frac{z}{(z+1)(z^2+1)} dz \quad C: |z-i| = 1;$$

$$3) \int_c z \cos^2 \frac{1}{z} dz \quad C: |z| = 1;$$

$$4) \int_c \frac{1}{z(z^2+4)} dz \quad C: |z| = 3;$$

$$5) \int_c \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} dz \quad C: |z| = 2;$$

$$6) \int_c \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz \quad C: |z-2| = \frac{1}{2};$$

$$7) \int_c \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz \quad C: |z| = 1;$$

$$8) \frac{1}{2\pi i} \int_c \sin \frac{1}{z} dz \quad C: |z| = 2;$$

$$9) \frac{1}{2\pi i} \int_c \sin^2 \frac{1}{z} dz \quad C: |z| = 2;$$

$$10) \int_{|z|=5} \frac{z dz}{\sin z (1 - \cos z)}.$$

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ЛИШКІВ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

$$\text{Розглянемо } \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi,$$

де R - раціональна функція своїх аргументів, тоді вірна формула:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \tilde{R}(z_k) \text{ дійсно після заміни } z = e^{i\varphi}.$$

$$d\varphi = \frac{1}{i} \frac{dz}{z}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)\right) \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \tilde{R}(z_k),$$

де z_k - особлива точка $\tilde{R}(z)$, що міститься в середині $|z| = 1$.

Приклад. $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + a \cos \varphi}, |a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + a \cos \varphi} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{z} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + R}$$

Особливі точки функції

$$f(z) = \frac{1}{az^2 + 2z + R} \in z_1 = -\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}, \quad z_2 = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}.$$

Точки z_1, z_2 - полюси першого порядку, але в середині $|z| = 1$ знаходиться тільки точка z_1 . Тому $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + a \cos \varphi} =$

$$4\pi \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=z_1} = 4\pi \frac{1}{a(z-z_2)} \Big|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-R^2}}$$

Теорема. Нехай функція $f(z)$ задана на всій дійсній осі $-\infty < x < \infty$, може бути аналітично продовжена на верхню півплощину $\operatorname{Im} z \geq 0$, причому її аналітичне продовження, $f(z)$, задовольняє умовам:

- 1) Існують числа $R_0, M, \delta > 0$, для всіх z з верхньої півплощини таких, що $|z| > R_0$ виконується оцінка $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+i}}$;
- 2) $f(z)$ не має особливих точок на дійсній осі, а в півплощині $\operatorname{Im} z \geq 0$ має не більше скінченного числа ізольованих особливих точок.

Тоді $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k)$, де z_k - особлива точка $f(z)$ в верхній півплощині.

Доведення теореми див. [1, с. 127].

Приклад. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$. Тоді $f(z) \frac{dz}{z^4+1}$ задовольняє умовам теореми.

Особливі точки в верхній півплощині $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ причому обидві – полюси першого порядку. Тому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi(\operatorname{resf}(e^{i\frac{\pi}{4}}) + \operatorname{resf}(e^{i\frac{3\pi}{4}})) = 2\pi i \left(\frac{1}{4z^3} \right) \bigg|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{4z^3} \bigg|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \text{ **Вправи.**}$$

Обчислити.

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi}, R > 1;$$

$$2) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2}, a > b > 0;$$

$$3) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos^2 \varphi)^2}, a, b > 0;$$

$$4) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2R \cos \varphi + R^2}, R \neq \pm 1;$$

$$5) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1 - 2R \cos \varphi + R^2} d\varphi, R \neq \pm 1;$$

$$6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2};$$

$$7) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + R^2)^2}, R > 0;$$

$$8) \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$9) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + R^2)(x^2 + b^2)}, R > 0, b > 0;$$

$$10) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной: Наука, М., 1970, 301 с.
2. *Пчёлкин Б.К.* Специальные разделы высшей математики. Высшая школа, М., 1973, 460 с.
3. *Макушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. Наука, М., 1978, 415 с.
4. *Волковыский Л.И., Луц Г.Л., Арманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Наука, М., 1970, 318 с.

**Методичні вказівки
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни
«Теорія функцій комплексної змінної»
для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»**

Укладач КОСТИКОВ Олександр Анатолійович

За авторською редакцією
Комп'ютерна верстка О. А. Костіков

120/2009. Формат 60 x 84/16. Ум. друк. арк.
Обл.-вид. арк. 2,27. Тираж 300 прим. Зам. № 31.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.2003.